МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методическое пособие

«Симплекс метод»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методическое пособие

«Симплекс метод»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973-018
И201

Методическое пособие «Симплекс метод»
М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 15 с.: ил.

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

АННОТАЦИЯ

В методическом пособии проводится изучение основных принципов мозгового штурма и техническое реализации решения задачи с повернутым стержнем. Объясняется принцип построения математической модели симплекс методом. После построения математической модели систем можно предугадать дальнейшее ее поведение.

ANNOTATION

The policy manual is carried out to study the basic principles of brainstorming and implementing technical solutions of the problem with rotated bar. Explained by the principle of constructing a mathematical model of the simplex method. After the construction of mathematical models of systems can predict future behavior.

11.5 Симплекс-метод

Симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования формально. Вначале рассмотрим несколько примеров применения симплекс метода. примерах покрытия некоторой логической схемы элементами с заданным базисом.

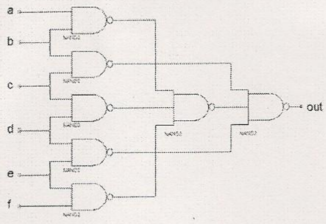

Рис. 1

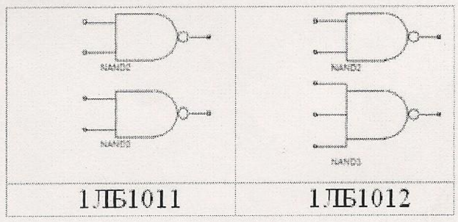

Рис. 2

<u>Пример № 1</u> Требуется покрыть логическую схему (рис.1) микросхемами 1ЛБ1011 и 1ЛБ1012 (рис.2). Пусть m — число типов ЛЭ, i — номер типа ЛЭ. Обозначим n — число типов корпусов.

В общем случае логическая схема содержит b_i логических элементов i-го типа (в нашем случае b1=5, b2=2). В — вектор состава ЛЭ схемы, B=(b1, b2)=(5; 2).

При переходе к принципиальной электрической схеме надо все элементы распределить по k корпусам, причем в корпусе j-го типа могут находиться логические элементы либо одного, либо двух типов.

Обозначим число логических элементов i-го типа в корпусе j-го типа Aij, и построим матрицу состава корпусов (1), котрая для данного примера имеет вид (2).
Требуется покрыть вектор B, взяв x_j корпусов j-го типа так, чтобы общее число корпусов K было минимально. Целевая функция в таком случае принимает вид (3):

$$\boxed{A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}} \quad (1)$$

$$\boxed{A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}} \quad (2)$$

$$\boxed{K = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \min} \quad (3)$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i} \quad (4)$$

$$K = x_1 + x_2 \to \min \quad (5)$$

Вектор B вводит естественное ограничение на функцию цели (4). В противном случае, какой-либо ЛЭ останется вне корпуса. Функция K линейна относительно x_j, поэтому задача называется задачей линейного программирования.

Для решения отбросим сначала требования целочисленности решения. После получения дробного результата рассмотрим все возможные дискретные точки в плоскости x_1Ox_2. Функция цели для данного примера имеет вид (5).

Сформулируем ограничения для данной задачи.

Исходная логическая схема содержит 5 ЛЭ 1-го типа. Если взять x_1 корпусов 1-го типа и x_2 корпусов 2-го типа, то они дадут $(2x_1+x_2)$ ЛЭ 1-го типа. Тогда $(2x_1+x_2)\ge 5$. Например, если $(2x_1+x_2)=3$, то два ЛЭ схемы останутся без корпусов. Аналогично, для ЛЭ 2-го типа имеем $x_2 \ge 2$. Решаем задачу графически. Строим область допустимых значений в плоскости x_1Ox_2.

Функция K линейно увеличивается. В данном случае линия решений K пересекает область допустимых решений в точке A(1,5; 2). Т.к. мы получили дробный результат, то исследуем ближайшие целочисленные варианты:

$x_1=1$, $x_2=3$ $\qquad$ $x_1=2$, $x_2=2$

Оба варианта эквивалентны по числу корпусов, но число незадействованных выводов в первом случае — k_1=4, а во втором — k_2=3.

Пример № 2 Фирма планирует получить прибыль z(x1,x2) от производства x1 тонн цветной плитки и x2 тонн – обычной.

Пусть прибыль от производства одной цветной плитки составляет $3, а от производства одной обычной – $2. Тогда $z(x_1,x_2)=3x_1+2x_2$ – целевая функция. Возможность получения максимального значения z ограничивают ресурсы предприятия:

- $t_m = 10$ *ч.*- время работы оборудования;
- $t_n = 24$ *ч.* – время работы персонала;
- $q = 8$ *литров* – объём цветной краски.

Известно, что при производстве тонны цветной плитки оборудование работает 2 ч, персонал – 3 часа и расходуется 3 литра цветной краски. При производстве 1 тонны белой плитки: оборудование работает 1 час, персонал – 3 часа и краски не надо.

Формальное ограничение ресурсов:

- $x_1 \geq 0$ (объем производства цветной плитки не может быть отрицательным);
- $x_2 \geq 0$ (объем производства белой плитки не может быть отрицательным);
- $2x_1 + x_2 \leq 10$ – в противном случае для производства какой-то плитки не хватить времени работы оборудования;
- $3x_1 + 3x_2 \leq 24$ – в противном случае для производства какой-то плитки не хватить времени работы персонала;
- $2x_1 + 0x_2 \leq 8$ – иначе для производства цветной плитки не хватить краски;

Каждая пара (x_1, x_2) удовлетворяющая этим ограничениям называется допустимым решением или программой. Так как прибыль должна быть максимальной, имеем:

$$z(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

Изобразим все прямые, задаваемые ограничениями, на плоскости в системе координат x_1Ox_2 (рис.1). Область допустимых решений (ОДР) на этом графике заштрихована – в каждой точке этой области соблюдаются все 5 ограничений. Построим на той же плоскости линию $3x_1 + 2x_2 = 0$ или, что то же, $x_2 = -1{,}5x_1$, соответствующую значению целевой функции $0 (начало производства).

Начало производства плитки приводит к тому, что x_1 и/или x_2 становятся положительными. Положительной становится и прибыль $z(x_1, x_2)$. Пусть значение прибыли составило $\underline{z(x_1, x_2) = const}$. Линия:

$$3x_1 + 2x_2 = const \qquad 1.1$$

пройдет правее линии $z = 0$, сместившись в направлении S, но с тем же наклоном (тангенс угла наклона остался прежним).

Известно, что значение const в функции (1.1) примет оптимальное значение в точке пересечения линии (1.1) с одной из вершин многоугольника, ограничивающего ОДР.

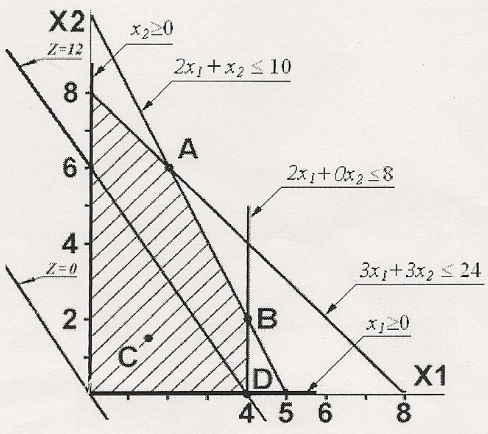

Рис.1

ственной проверкой убеждаемся, что оптимальное решение находиться в узле А, е ресурсы, кроме краски исчерпаны.
им аналитическое решение задачи симплекс–методом.
разуем неравенства–ограничения в равенства, введением так называемых *сво-х* переменных y_1, y_2 и y_3.

$$2x_1+x_2+y_1=10$$
$$3x_1+3x_2+y_2=24 \qquad (*)$$
$$2x_1+0x_2+y_3=8$$

уранений (*) содержит 5 переменных и любое их значение, удовлетворяющее (*) является допустимым решением. В частном случае, перед началом производ-ые переменные x_1 и x_2 равны нулю, а свободные (y_1, y_2 и y_3), как это следует из равны соответственно y_1=10, y_2=24 и y_3=8. Полученное решение называется *на-устимым решением* (НДР), дающим нулевую прибыль: $z(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 = 0$.
енное НДР сводим в симплекс-таблицу (табл.1).

Таблица 1

	Ресурсы
	y_1=10 (*машинное время*)
	y_2=24 (*рабочее время*)
	y_3=8 (*краска*)
	z =0 (*– прибыль*)

Таблица 2

y_3	x_2	Ресурсы
–1	1	2 =y_1(*машинное время*)
–1,5	3	12= y_2 (*рабочее время*)
0,5	0	4= x_1(*объем цв.*)
–1,5	2	–12= z (*– прибыль*)

, 2 и 3 симплекс–таблицы представляют матричную форму записи системы урав-Іоследняя строка – представляет значение прибыли. В столбце 3 представлено НДР, которое можно улучшить, например, производством плиток одного из двух ервой строки симплекс–таблицы видно, что на производство одной тонны цвет-расходуется 2 часа *машинного времени*. Наличное машинное время (y_1=10) огра-оизводство цветной плитки количеством 10/2=5 тонн. Аналогично вторая и тре-ограничивают производство цветной плитки восемью и четырьмя тоннами. Эле-ий на пересечении столбца x_1 и строки y_3 называется ограничивающим элемен-*нтром*. Строка и столбец, на пересечении которых находится центр называются пользовать 1 час машинного времени и 1,5 часа рабочего времени и всё это приведёт к сокращению производства плиток первого типа на 0,5 тонны и уменьшению прибыли на 1,5.

Это решение можно улучшить, начав производство обычной плитки. Объем ее производства ограничивает ресурс оставшегося машинного времени в количестве 10–(2×4)=2 часа, которого хватит на производство 2-х тонн обычной плитки. Программа $\boxed{x_1=4,\quad x_2=2}$ даст прибыль $z=3\times4+2\times2=16$ и уменьшит ресурс рабочего времени до 12–(3×2)=6 часов, которого хватило бы на производство 2-х тонн обычной плитки (точка B на графике). Далее повысить прибыль можно, снизив объем производства цветной плитки и (за счет высвобождающегося ресурса машинного времени) увеличить объем производства обычной плитки. Последняя дает в 1,5 раза меньше прибыли на тонну, чем цветная, но при том же ресурсе машинного времени ее можно произвести в 2 раза больше. Если уменьшить x_1 на 1 в программе $\boxed{x_1=4,\quad x_2=2}$, то можно реализовать программу $\boxed{x_1=3,\quad x_2=4}$, и получить прибыль $z=3\times3+2\times5=17$ вместо 16.

Опишем алгоритм выполнения очередной итераций преобразования симплекс–таблицы. Исходную симплекс-таблицу будем называть «старой», а результирующую – «новой». Описание будем сопровождать примером формального преобразования таблицы 1 в таблицу 2. Предварительно представим исходную симплекс-таблицу (табл.1) в компактном виде (рис.2) и введем ряд обозначений:

A – центр;

B=1/**A** – величина, обратная центру;

$\mathbf{D_{ij}}$ –элемент на пересечении **i**-й строки и **j**-го столбца симплекс-таблицы;

$\mathbf{R_i}$ – элемент **i**-й строки столбца ресурсов симплекс–таблицы;

$\mathbf{Q_i}$ – элемент **i**-й строки *центрального* столбца симплекс-таблицы;

$\mathbf{P_j}$ – элемент **j**-го столбца *центральной* строки симплекс-таблицы;

$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$(**S**) – элемент старой (новой) симплекс-таблицы.

<u>Алгоритм:</u>

1. В старой симплекс-таблице найти центр, удовлетворяющий трем условиям:
   - центр находится в столбце, последний элемент которого положителен;
   - центр должен быть ненулевым;
   - центр лежит в том столбце, в котором **z>0**. Если таких столбцов несколько, выбрать тот, в котором частное от деления $\mathbf{R_i}$ на $\mathbf{D_{ij}}$ минимально.

В таблице (рис.2) в столбцах x_1 и x_2 прибыль положительна, но $\min\{\underline{\underline{R}}_1/\underline{\underline{D}}_{11}, \underline{\underline{R}}_2/\underline{\underline{D}}_{21}, \underline{\underline{R}}_3/\underline{\underline{D}}_{31}, \underline{\underline{R}}_1/\underline{\underline{D}}_{12}, \underline{\underline{R}}_2/\underline{\underline{D}}_{22}, \underline{\underline{R}}_3/\underline{\underline{D}}_{32}\} = \mathrm{MIN}\{10/2, 24/3, 8/2, 10/1, 24/3, 8/0\}=4$ лежит в строке 3 столбца 1, поэтому $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{D}}_{31}=2$.

2. Вычисляем величину **B**, в симплекс таблице меняем центр на **B** и выполняем обмен переменных, на пересечении которых находится центр.

Вычисляем **B**=1/2=0,5 в симплекс таблице заменяем **A**=2 на **B** =0,5 и после обмена переменных x_1 и y_3 приходим к таблице на рис.2 (пустые клетки еще не определены)

x_1	x_2	Ресурсы
$\underline{\underline{D}}_{11}=\underline{\underline{Q}}_1=2$	$\underline{\underline{D}}_{12}=1$	$\underline{\underline{D}}_{13}=\underline{\underline{R}}_1=y_1=10$
$\underline{\underline{D}}_{21}=\underline{\underline{Q}}_2=3$	$\underline{\underline{D}}_{22}=3$	$\underline{\underline{D}}_{23}=\underline{\underline{R}}_2=y_2=24$
$\underline{\underline{D}}_{31}=\underline{\underline{A}}=2$	$\underline{\underline{D}}_{32}=\underline{\underline{P}}_2=0$	$\underline{\underline{D}}_{33}=\underline{\underline{P}}_3=y_3=8$
$\underline{\underline{D}}_{41}=\underline{\underline{Q}}_4=3$	$\underline{\underline{D}}_{42}=2$	$\underline{\underline{D}}_{43}=\underline{\underline{R}}_4=z=0$

Рис. 2

y_3	x_2	Ресурсы
		y_1
		y_2
0,5		x_1

Рис. 3

y_3	x_2	Ресурсы
$D_{11}=Q_1=-1$	D_{12}	$D_{13}=R_1=y_1$
$D_{21}=Q_2=-1{,}5$	D_{22}	$D_{23}=R_2=y_2$
$D_{31}=1/\underline{\underline{B}}=0{,}5$	0	$D_{33}=R_3=x_1=4$
$D_{41}=Q_4=-1{,}5$	D_{42}	$D_{43}=R_4=z$

Рис. 4

3. Переписываем все элементы центральной –3-й– строки (кроме самого центра) из старой в новую симплекс-таблицу, попутно умножая их на **B**.

Последовательно находим: $P_2=\underline{\underline{P}}_2\times B=0\times0{,}5=0$; $P_3=\underline{\underline{P}}_3\times B=8\times0{,}5=4$;

4. Переписываем все элементы центрального столбца (кроме самого центра) из старой в новую симплекс-таблицу, попутно умножая их на (**−B**).

Выполнив расчет: $Q_1=\underline{\underline{Q}}_1\times(-B)=2\times(-0{,}5)=-1$; $Q_2=\underline{\underline{Q}}_2\times(-B)=3\times(-0{,}5)=-1{,}5$; $Q_4=\underline{\underline{Q}}_4\times(-B)=3\times(-0{,}5)=-1{,}5$ – приходим к симплекс-таблице, показанной на рис.4 (элементы, обозначенные D_{ij} еще не найдены).

5. Оставшиеся элементы D_{ij} в новой симплекс-таблице вычисляем по формуле:

$$D_{ij}=\underline{\underline{D}}_{ij}-P_j\times\underline{\underline{Q}}_i$$

Выполнив расчет: $D_{12}=\underline{\underline{D}}_{12}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_1=1-0\times2=\mathbf{1}$; $D_{13}=\underline{\underline{D}}_{13}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_1=10-4\times2=\mathbf{2}$;

$D_{22}=\underline{\underline{D}}_{22}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_2=3-0\times3=\mathbf{3}$; $D_{23}=\underline{\underline{D}}_{23}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_2=24-4\times3=\mathbf{12}$;

$D_{42}=\underline{\underline{D}}_{42}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_4=2-0\times3=\mathbf{2}$; $D_{43}=\underline{\underline{D}}_{43}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_4=0-4\times3=\mathbf{-12}$;

приходим к симплекс-таблице, показанной в табл.2. Элемент D_{43} показывает прибыль **12** от реализации новой программы $\boxed{x_1=4,\ \ x_2=0}$ – точка D на графике (рис.1)

Второй столбец табл.2 показывает, что прибыль можно увеличить ($D_{42}=2>0$). Далее выполняем вторую итерацию преобразования симплекс таблицы по описанному алгоритму. Теперь старой симплекс-таблицей является таблица 2. Построение новой симплекс-таблицы выполняем этапами:

1. Находим новый центр: поскольку $\min\{\underline{\underline{R}}_1/\underline{\underline{D}}_{12},\ \underline{\underline{R}}_2/\underline{\underline{D}}_{22},\ \underline{\underline{R}}_3/\underline{\underline{D}}_{32}\}=\mathrm{MIN}\{2/1,\ 12/3,\ 4/6\}=2$ лежит в строке 1 столбца 2, то $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{D}}_{12}=1$.
2. Определяем величину обратную центру ($\underline{\underline{B}}=1/\underline{\underline{A}}=1$), выполняем обмен переменных $x_2\leftrightarrow y_1$ и старый центр меняем на $\underline{\underline{B}}=1$.
3. Формируем центральную строку новой симплекс-таблицы: последовательно находим: $P_1=\underline{\underline{P}}_1\times B=-1\times1=-1$; $P_3=\underline{\underline{P}}_3\times B=2\times1=2$
4. Формируем центральный столбец новой симплекс-таблицы: $Q_2=\underline{\underline{Q}}_2\times(-B)=3\times(-1)=-3$; $Q_3=\underline{\underline{Q}}_3\times(-B)=0\times(-1)=0$; $Q_4=\underline{\underline{Q}}_4\times(-B)=2\times(-1)=-2$ (рис. 5)

y_3	y_1	Ресурсы
-1	1	$2=\underline{\underline{P}}_3=x_2$
$\underline{\underline{D}}_{21}$	-3	$\underline{\underline{D}}_{23}=\underline{\underline{R}}_2=y_2$
$\underline{\underline{D}}_{31}$	0	$\underline{\underline{D}}_{33}=\underline{\underline{R}}_3=x_1$
$\underline{\underline{D}}_{41}$	-2	$\underline{\underline{D}}_{43}=\underline{\underline{R}}_4=z$

Рис. 5

y_3	y_1	Ресурсы
-1	1	$2=x_2$
1,5	-3	$6=y_2$
0,5	0	$4=x_1$
0,5	-2	$-16=z$

Рис. 6

y_3	y_1	Ресурсы
$\underline{\underline{D}}_{11}=-1$	$\underline{\underline{D}}_{12}=1$	$2=x_2=R_1$
$\underline{\underline{D}}_{21}=1{,}5$	$\underline{\underline{D}}_{22}=-3$	$6=y_2=R_2$
$\underline{\underline{D}}_{31}=0{,}5$	$\underline{\underline{D}}_{32}=0$	$4=x_1=R_3$
$\underline{\underline{D}}_{41}=0{,}5$	$\underline{\underline{D}}_{42}=-2$	$-16=z=R_4$

Рис. 7

5. Вычисляем оставшиеся элементы D_{ij} по формуле: $D_{ij}=\underline{\underline{D}}_{ij}-P_j\times\underline{\underline{Q}}_i$

$D_{21}=\underline{\underline{D}}_{21}-P_1\times\underline{\underline{Q}}_2 = -1{,}5-(-1\times3)= \mathbf{1{,}5}$; $D_{31}=\underline{\underline{D}}_{31}-P_1\times\underline{\underline{Q}}_3= 0{,}5-(-1\times0)= \mathbf{0{,}5}$;
$D_{41}=\underline{\underline{D}}_{41}-P_1\times\underline{\underline{Q}}_4 = -1{,}5-(-1\times2)= \mathbf{0{,}5}$; $D_{23}=\underline{\underline{D}}_{23}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_2= 12-2\times3 = \mathbf{6}$;
$D_{33}=\underline{\underline{D}}_{33}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_3 = 4-2\times0 = \mathbf{4}$; $D_{43}=\underline{\underline{D}}_{43}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_4= -12-2\times2 = \mathbf{-16}$;
приходим к симплекс-таблице, показанной на рис.6. Элемент D_{43} показывает прибыль **16** от реализации новой программы $\boxed{x_1=4,\ \ x_2=2}$ – точка B на графике (рис.1).

Первый столбец таблицы на рис.6 показывает, что прибыль можно увеличить ($D_{41}=0{,}5>0$). Далее выполняем третью итерацию преобразования симплекс таблицы по описанному алгоритму. Теперь старой симплекс-таблицей является таблица на рис.6. Запишем ее в виде рис.7 и выполняем построение новой симплекс-таблицы этапами:

1. Находим новый центр: поскольку $\min\{\underline{\underline{R}}_1/\underline{\underline{D}}_{11},\ \underline{\underline{R}}_2/\underline{\underline{D}}_{21},\ \underline{\underline{R}}_3/\underline{\underline{D}}_{31}\} = \min\{2/-1;\ 6/1{,}5;\ 4/0{,}5\}=\min(-2;4;8)$ и центр должен быть положительным, имеем: $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{D}}_{21}=1{,}5$.
2. Определяем величину обратную центру ($\underline{\underline{B}}=1/\underline{\underline{A}} = 0{,}67$), выполняем обмен переменных $y_2 \leftrightarrow y_3$ и старый центр меняем на $\underline{\underline{B}}=0{,}67$.
3. Формируем центральную строку новой симплекс-таблицы: последовательно находим: $P_2=\underline{\underline{P}}_2\times B = -3\times0{,}67= -2$; $P_3=\underline{\underline{P}}_3\times B = 6\times0{,}67=4$
4. Формируем центральный столбец новой симплекс-таблицы: $Q_1=\underline{\underline{Q}}_1\times(-B)= = -1\times(-0{,}67)= 0{,}67$; $Q_3=$ $Q_4=\underline{\underline{Q}}_3\times(-B)= 0{,}5\times(-0{,}67)= -0{,}34$; (рис. 5)

y_2	y_1	Ресурсы
Q_1	D_{12}	$D_{13}=x_2$
0,67	P_2	$P_3=y_3$
Q_3	D_{32}	$D_{33}=x_1$
Q_4	D_{42}	$D_{43}=Z$

Рис. 8

y_2	y_1	Ресурсы
0,67	D_{12}	$D_{13}=x_2$
0,67	-2	$4=y_3$
-0,34	D_{32}	$D_{33}=x_1$
-0,34	D_{42}	$D_{43}=Z$

Рис. 9

y_2	y_1	Ресурсы
0,67	–1	$6=x_2$
0,67	-2	$4=y_3$
-0,34	1	$2=x_1$
-0,34	–1	$-18=Z$

Рис. 10

5. Вычисляем оставшиеся элементы D_{ij} по формуле: $D_{ij}=\underline{\underline{D}}_{ij}-P_j\times\underline{\underline{Q}}_i$

$D_{12}=\underline{\underline{D}}_{12}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_1 = 1-(-2)\times(-1)= \mathbf{-1}$; $D_{32}=\underline{\underline{D}}_{32}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_3= 0-(-2\times0{,}5)= \mathbf{1}$;
$D_{42}=\underline{\underline{D}}_{42}-P_2\times\underline{\underline{Q}}_4 = -2-(-2\times0{,}5)= \mathbf{-1}$; $D_{13}=\underline{\underline{D}}_{13}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_1 = 2-4\times(-1)= \mathbf{6}$;
$D_{33}=\underline{\underline{D}}_{33}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_3 = 4-(4)\times(0{,}5)= \mathbf{2}$; $D_{43}=\underline{\underline{D}}_{43}-P_3\times\underline{\underline{Q}}_4 = -16-(4)\times(0{,}5)= \mathbf{-18}$;

Результирующая таблица представлена на рис.10 и, поскольку в ней ($D_{41}<0$) и $D_{42}<0$, то больше прибыль увеличить невозможно.